1. Klausur: Experimentalphysik III - Quantenmechanik WS 04/05
Bearbeitungszeit: 120 min

Aufgabe 1: Schwarzkörperstrahlung
Das Plancksche Strahlungsgesetz

$$E(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{\exp(\frac{\hbar\omega}{k_B T}) - 1}$$

gibt an, wie die spektrale Strahlungsintensität eines schwarzen Körpers von der Strahlungsfrequenz ω abhängt.

(a) Bei welcher Strahlungsfrequenz liegt das Maximum? (Wiensches Verschiebungsgesetz)
Hinweis: Wenn Sie eine Bestimmungsgleichung in $x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$ erhalten, so können Sie e^{-x} im Vergleich zu den anderen Termen vernachlässigen. (5 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass die gesamte Strahlungsleistung $\int_0^\infty d\omega\ E(\omega, T)$ proportional zu T^4 ist. (Stefan-Boltzmann-Gesetz) (4 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass man für große ω näherungsweise das Wien'sche Strahlungsgesetz

$$E(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2}\, e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}$$

erhält. (4 Punkte)

Aufgabe 2: Photoelektrischer Effekt
Eine Metallplatte werde elektrisch auf die Ladung $Q = 1$ C aufgeladen. Das Licht einer Quecksilberdampflampe ($\lambda = 350$ nm) mit einer Lichtleistung von 50 W werde auf die Metallplatte gebündelt. Die Auslösearbeit für Elektronen aus dem Metall betrage 3 eV.

(a) Wie lange dauert es, bis die Platte vollständig entladen ist? (6 Punkte)

(b) Warum misslingt das Experiment, wenn man eine Natriumdampflampe ($\lambda = 589$ nm) benutzt? (3 Punkte)

Aufgabe 3: Compton Rückstreuung
Eine Möglichkeit, hochenergetische Photonen zu erhalten, besteht darin, ein hochenergetisches Elektron und ein Photon frontal (Winkel 180°) aufeinander stoßen zu lassen.
Das Elektron habe den Impuls p_e in positive x-Richtung. Da wir davon ausgehen, dass das Elektron hochenergetisch ist, kann man seine Masse vernachlässigen und seine Energie ist $E_e = p_e \cdot c$. Das Photon habe die Frequenz ν und fliege anfänglich in die negative x-Richtung.

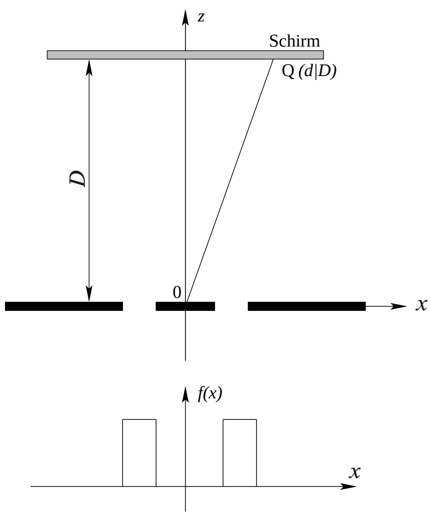
Berechnen Sie die Frequenz des Photons nach dem Stoß. (8 Punkte)

Aufgabe 4: Halbklassischer Potentialtopf

Ein klassisches Teilchen bewege sich in einem (eindimensionalen) unendlich hohen Potentialtopf der Breite a hin und her. Berechnen Sie die erlaubten Energieniveaus unter den Quantisierungsbedingung $\oint dx \cdot p = n \cdot h$. $\oint dx$ bedeutet dabei die Integration über eine Periode (Bewegung von $x = 0 \ldots a$ und zurück). (8 Punkte)

Aufgabe 5: Quantenmechanischer Doppelspalt

Ein Strahl von Elektronen mit der Geschwindigkeit v_z in z-Richtung werde auf einen Doppelspalt (Spaltabstand $2L$, Spaltbreite a) gelenkt.



(a) Wir betrachten zuerst die Zusammensetzung des Wellenpaketes in x-Richtung. Im Ortsraum hat der Elektronenstrahl hinter dem Spalt die Amplitude

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -L - \frac{a}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2a}} & -L - \frac{a}{2} < x < -L + \frac{a}{2} \\ 0 & -L + \frac{a}{2} < x < L - \frac{a}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2a}} & L - \frac{a}{2} < x < L + \frac{a}{2} \\ 0 & x > L + \frac{a}{2} \end{cases}$$

Um daraus die Amplitude im Impulsraum (Impulskomponente in x-Richtung) zu erhalten, berechne Sie die Fouriertransformation

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \; f(x)\, e^{ikx} \,.$$

Hinweis: Benutzen Sie $e^{ix} + e^{-ix} = 2i\cos(x)$ und $e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin(x)$, um das Ergebnis als Produkt von Sinus und Cosinus zu schreiben. (10 Punkte)

(b) Die Wahrscheinlichkeits(dichte), einen bestimmten Impuls $p_x = \hbar k$ zu messen, ist $P(p_x) = |\tilde{f}(k)|^2$. Aus p_x und $p_z = m_e v_z$ lässt sich die Richtung bestimmen, in die die Elektronen fliegen, so dass sie am Punkte d auf dem Schirm auftreffen ($d/D = p_x/p_z$).

Bestimmen Sie $P(p_x)$ und schreiben Sie das Resultat weiter als Funktion von d. Das Resultat ist das Beugungsmuster, das auf dem Schirm zu sehen ist.

Entwickeln Sie das Resultat für kleine Spaltbreiten $a \to 0$ ($\sin(x) = x$ für kleine x). (6 Punkte)

(c) Benutzen Sie das Ergebnis für kleine Spaltbreiten, um den Abstand d des ersten Beugungsminimums zu bestimmen. (5 Punkte)

(d) Bestimmen Sie den Ort des ersten Beugungsminimums auf die klassische Weise (Wellen mit der de-Broglie-Wellenlänge λ, erstes Beugungsminimums beim Gangunterschied $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{2}$). (7 Punkte)

Aufgabe 6: Potentialtopf und Parität
Wir betrachten einen unendlichen hohen Potentialtopf der Breite a: $V(x) = 0$ für $|x| < a/2$ und ∞ sonst.
Die erlaubten Wellenfunktionen haben entweder gerade oder ungerade Parität.

(a) Welche Bedingung müssen die Wellenfunktionen mit *ungerader* Parität am Ursprung $x = 0$ erfüllen? (4 Punkte)

(b) Zeigen Sie durch Vergleich der Randbedingungen, dass die Energieniveaus mit ungerader Parität die gleichen sind, wie die Energieniveaus (mit beliebiger Parität) eines Potentialtopfs der Breite $a/2$. (4 Punkte)

Aufgabe 7: Harmonischer Oszillator
Die Wellenfunktion für den Grundzustand des harmonischen Oszillators ist

$$\varphi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} .$$

Zeigen Sie, dass man durch Anwenden des *Erzeugens-Operators*

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X - \frac{\partial}{\partial X}\right) , \qquad X = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$$

auf φ_0 die Wellenfunktion des ersten angeregten Zustands erhält:

$$\varphi_1(x) = \left(\frac{m^3\omega^3}{\hbar^3\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{2x}{\sqrt{2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} .$$

(5 Punkte)

Aufgabe 8: Wasserstoffatom: Drehimpuls
Bestimmen Sie den Erwartungswert für die z-Komponente des Drehimpulses $L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$ für die Zustände $(l, m) = (1, 0), (1, 1), (1, -1)$. (6 Punkte)
Hinweis:

$$Y_{l=1}^{m=0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta , \quad Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\varphi} , \quad Y_1^{-1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\varphi} .$$

Aufgabe 9: Wassserstoffatom: Radius

Die Radialanteile der Wellenfunktion des Wasserstoffatoms für die Zustände $n = 1, l = 0$ und $n = 2, l = 0$ sind

$$R_{10}(r) = \frac{2}{a_0^{2/3}}\, e^{-\frac{r}{a_0}}\ , \quad R_{20}(r) = \frac{2}{(2a_0)^{\frac{3}{2}}}\left(1 - \frac{r}{2a_0}\right)e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

wobei $a_0 = \frac{\hbar^2}{m\mathrm{e}^2/4\pi\varepsilon_0}$ der Bohr-Radius ist.

(a) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\langle r^2 \rangle$ für die Zustände $n = 1$ und $n = 2$. (10 Punkte)

Hinweis: Substituieren Sie das Integral so, dass Sie im Integranden e^{-x} erhalten und benutzen Sie $\int_0^\infty dx\ x^n e^{-x} = n!$.

(b) Bestimmen Sie r^2 für die beiden Zustände nach dem Bohr-Modell (setzen Sie die Coulombkraft $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{e}^2}{r}$ gleich der Zentripetalkraft $\frac{mv^2}{r}$ und benutzen Sie die Drehimpulsquantelung) und vergleichen Sie mit dem obigen Resultat. (5 Punkte)

Lösungsvorschlag

1. (a) Maximum der Schwarzkörperstrahlung

$$E(\omega,T)=\frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2\mathrm{c}^2}\,\frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)-1}\ ,$$

dazu berechne man die erste Ableitung

$$\begin{aligned}\frac{dE(\omega,T)}{d\omega}&=\left(3\frac{\hbar\omega^2}{4\pi^2\mathrm{c}^2}\right)\frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)-1}+\frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2\mathrm{c}^2}\,\frac{-1}{\left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)-1\right]^2}\cdot\frac{\hbar}{k_BT}e^{-\frac{\hbar\omega}{k_BT}}\\&=\frac{\hbar\omega^2}{4\pi^2\mathrm{c}^2}\,\frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)-1}\cdot\left(3-\frac{\frac{\hbar\omega}{k_BT}}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)-1}\cdot e^{-\frac{\hbar\omega}{k_BT}}\right)\end{aligned}$$

Für ein Maximum muss die erste Ableitung verschwinden, d.h mit $x=\frac{\hbar\omega}{k_BT}$ folgt

$$0=3-\frac{x\cdot e^x}{e^x-1}\ \Leftrightarrow\ 3e^x-3=xe^x\ \Leftrightarrow\ (3-x)e^x-3=0\ \Leftrightarrow\ (3-x)-3e^{-x}=0$$

Mit $3e^{-x}\approx 0$ liegt das Maximum bei $\frac{\hbar\omega}{k_BT}=3$, und somit

$$\boxed{\omega_{\max}=3\,\frac{k_BT}{\hbar}}\ .$$

(b) Mit $x=\frac{\hbar\omega}{k_BT}$, berechne man die totale Abstrahlung

$$\begin{aligned}E_{\text{tot}}&=\int_0^\infty d\omega\ \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2\mathrm{c}^2}\,\frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)-1}\\&=\int_0^\infty dx\ \frac{\hbar}{4\pi^2\mathrm{c}^2}\left(x^3\cdot\left(\frac{k_BT}{\hbar}\right)^3\right)\cdot\frac{k_BT}{\hbar}\cdot\frac{1}{e^x-1}\\&=\frac{\hbar}{4\pi^2\mathrm{c}^2}\cdot\left(\frac{k_BT}{\hbar}\right)^4\underbrace{\int_0^\infty dx\ \frac{x^3}{e^x-1}}_{\text{unabhängigvon}T}\sim T^4\end{aligned}$$

(c) große ω:

$$e^{\frac{\hbar\omega}{k_BT}}\gg 1\qquad\Rightarrow\qquad E(\omega,T)\approx\frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2\mathrm{c}^2}\,e^{-\frac{\hbar\omega}{k_BT}}\ .$$

2. (a) Auslösearbeit des Kupfers: $W_A = 3$ eV. Energie des Photons: $E_\gamma = h\nu = \frac{h\mathrm{c}}{\lambda}$,

$$\frac{\text{Anzahl Photonen}}{\text{Sekunde}} = n_\gamma = \frac{W_A}{E_\gamma} ,$$

Anzahl der Elektronen $N_\mathrm{e} = \frac{Q}{\mathrm{e}}$, damit ist die Zeit

$$t = \frac{N_\mathrm{e}}{n_\gamma} = \frac{Q}{\mathrm{e}} \cdot \frac{1}{W} \cdot \frac{h\mathrm{c}}{\lambda}$$
$$= \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \frac{1}{50\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}} \cdot (3,54\ \mathrm{eV}) = \frac{3,54}{50}\ \mathrm{s} = 0,071\ \mathrm{s} .$$

(b) Bedingung: $\frac{h\mathrm{c}}{\lambda} >$ Auslösearbeit W_A. Natrium,

$$\frac{h\mathrm{c}}{\lambda} 2,11\ \mathrm{eV} ,$$

zu klein um Auszulösen.

3. Compton Back-Scattering

Vorher	Elektron	Impuls	p_e
		Energie	$E_\mathrm{e} = p_\mathrm{e}\mathrm{c}$
	Photon	Impuls	$p_\gamma = -\frac{h\nu}{\mathrm{c}}$
		Energie	$E_\gamma = h\nu$

Nachher fliege das Elektron nach links, d.h. $p'_\mathrm{e} = -|p'_\mathrm{e}|$, das Photon fliege nach rechts: $p'_\gamma = +\frac{h\nu'}{\mathrm{c}}$.

$$(1) \qquad -p'_\mathrm{e} + \frac{h\nu'}{\mathrm{c}} = p_\mathrm{e} - \frac{h\nu}{\mathrm{c}} \qquad \text{Impulserhaltung ,}$$
$$(2) \qquad h\nu' + p'_\mathrm{e}\mathrm{c} = p_\mathrm{e}\mathrm{c} + h\nu \qquad \text{Energieerhaltung .}$$

Aus (1) folgt

$$p'_\mathrm{e} = p_\mathrm{e} + \frac{h}{\mathrm{c}}(\nu + \nu') ,$$

eingesetzt in (2) ergibt

$$h\nu' - p_\mathrm{e}\mathrm{c} + h\nu + h\nu' = p_\mathrm{e}\mathrm{c} + h\nu$$
$$2h\nu' = 2p_\mathrm{e}\mathrm{c} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\nu' = \frac{p_\mathrm{e}\mathrm{c}}{\hbar}} .$$

4. Eine Periode spaltet sich auf in eine Bewegung links → recht,

$$p = +|p| \qquad \int_0^a dx\ p = |p|a\ ,$$

und eine Bewegung rechts → links

$$p = -|p| \qquad \int_a^0 dx\ p = |p|a\ ,$$

somit

$$\oint dx\ p = 2|p|a = n \cdot h\ , \quad E = \frac{|p|^2}{2m} \ \Rightarrow\ \boxed{E_n = \frac{1}{2m} \cdot \frac{n^2h^2}{4a^2}}\ .$$

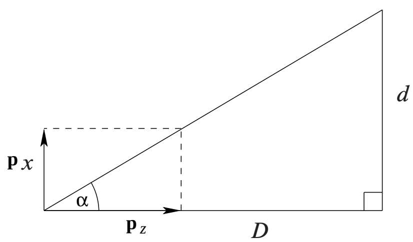
5. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(k_x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\, e^{ik_x x} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2a}} \left\{ \int_{-L-\frac{a}{2}}^{-L+\frac{a}{2}} dx\ e^{ik_x x} + \int_{L-\frac{a}{2}}^{L+\frac{a}{2}} dx\ e^{ik_x x} \right\} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} \left\{ \left[\frac{e^{ik_x x}}{ik_x} \right]_{-L-\frac{a}{2}}^{-L+\frac{a}{2}} + \left[\frac{e^{ik_x x}}{ik_x} \right]_{L-\frac{a}{2}}^{L+\frac{a}{2}} \right\} \\
&= \frac{1}{2ik_x\sqrt{a\pi}} \left\{ e^{ik(-L+\frac{a}{2})} - e^{ik_x(-L-\frac{a}{2})} - e^{ik_x(L+\frac{a}{2})} + e^{ik_x(-L-\frac{a}{2})} \right\} \\
&= \frac{1}{2ik_x\sqrt{a\pi}} \left\{ e^{-ik_x L} \underbrace{\left(e^{ik_x\frac{a}{2}} - e^{-ik_x\frac{a}{2}} \right)}_{=\ 2i\ \sin(k_x\frac{a}{2})} + e^{ik_x L} \left(e^{ik_x\frac{a}{2}} - e^{-ik_x\frac{a}{2}} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{k_x\sqrt{a\pi}} \left\{ \sin\left(k_x \frac{a}{2}\right) \underbrace{\left(e^{ik_x L} + e^{-ik_x L} \right)}_{=\ 2\cos(k_x L)} \right. \\
&= \frac{2}{k_x\sqrt{a\pi}} \sin\left(k_x \frac{a}{2}\right) \cos(kL)\ ,
\end{aligned}$$

somit

$$\boxed{\tilde{f}(k_x) = \frac{2\sin\left(k_x\frac{a}{2}\right)\cos(k_x L)}{k_x\sqrt{a\pi}}}\ .$$

(b) Der Impuls $\vec{p}$ kann eine Komponenten $p_x = \hbar k = v_x m_e$ in x-Richtung und eine Komponente $p_z = v_z \gamma m_0$ in z-Richtung zerlegt werden. Der Skizze entnimmt man mit dem Strahlensatz



$$\frac{p_x}{p_z} = \frac{d}{D} \, .$$

Daraus folgt

$$\frac{p_x}{p_z} = \frac{\hbar k_x}{v_z \gamma m_0} = \frac{d}{D} \;\Rightarrow\; \boxed{k_x = \frac{v_z \gamma m_0}{\hbar} \frac{d}{D}} \, .$$

Es gilt $\mathcal{P}(p_x) = |\tilde{f}(k_x)|^2$ mit $\tilde{f}(k_x) = \frac{2 \sin(k_x \frac{a}{2}) \cos(k_x L)}{k_x \sqrt{a\pi}}$ aus (c) folgt

$$\mathcal{P}(p_x) = \frac{4 \sin^2\left(k_x \frac{a}{2}\right) \cos^2(k_x L)}{k_x^2 \pi a} \qquad \text{mit} \qquad k_x = \frac{v_z m_0 \gamma}{\hbar} \frac{d}{D} \quad \text{aus (d)}$$

$$\boxed{\mathcal{P}(d) = \frac{4\hbar^2}{a\pi v_z^2 m_0^2 \gamma^2} \left(\frac{D}{d}\right)^2 \sin^2\left(\frac{a v_z m_0 \gamma}{2\hbar D} \, d\right) \cos^2\left(\frac{v_z m_0 \gamma L}{D\hbar} \, d\right)}$$

Mit der Kleinwinkelnäherung: $\sin x \approx x$ für $a \to 0$ folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(d) &\approx \frac{4\hbar^2}{a\pi v_z^2 m_0^2 \gamma^2} \left(\frac{D}{d}\right)^2 \left(\frac{a^2 v_z^2 m_0^2 \gamma^2 d^2}{4\hbar^2 D^2}\right) \cos^2\left(\frac{v_z m_0 \gamma L}{D\hbar} \, d\right) \\
&= \frac{a}{\pi} \cos^2\left(\frac{v_z m_0 \gamma L}{D\hbar} \, d\right) \;\Rightarrow\; \boxed{\mathcal{P}(d) = \frac{a}{\pi} \cos^2\left(\frac{v_z m_0 \gamma L}{D\hbar} \, d\right)}
\end{aligned}$$

(c) Damit ein Minimum vorliegt, muss die Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}(d)$ verschwinden. Mit $\mathcal{P}(d) \sim \cos^2 \beta$ aus (e) folgt

$$\cos \beta = 0 \;\forall\; \beta = (2n-1)\frac{\pi}{2} \, ,$$

das Minimum 1. Ordnung somit für $n = 1$, d.h.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{v_z m_0 \gamma L}{D\hbar} \cdot d \;\Rightarrow\; \boxed{d = \frac{\pi}{2} \frac{\hbar}{v_z m_0 \gamma} \frac{D}{L}}$$

(d) Aus der Geometrie der Anordnung folgt

$$\tan \alpha = \frac{d}{D} \qquad \Rightarrow \qquad d = D \cdot \tan \alpha \, ,$$

und $\Delta\lambda_1 = 2L \cdot \sin\alpha \approx 2L\alpha$. Mit $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{2}$ für das erste Minimum und

$$m_e v_z = p_z = \hbar k_z = \hbar \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_e v_z}$$

schließlich

$$2L \cdot \frac{d}{D} = \frac{\hbar\pi}{m_e v_z} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{d = \frac{D}{2L} \cdot \frac{\hbar\pi}{m_e v_z}}.$$

6. (a) Randbedingung: $\Psi(\frac{a}{2}) = \Psi(-\frac{a}{2}) = 0$. Ungerade Parität bedeudet $\Psi(x) = -\Psi(-x)$, für $x \to 0$, somit $\Psi(0) = -\Psi(0)$: $\Psi(0) = 0$.

   (b) Aus (a) folgen die neuen Randbedingungen

$$\Psi(0) = 0 \qquad \wedge \qquad \Psi\left(\pm\frac{a}{2}\right) = 0$$

Entspricht einem Potentialtopf mti der Breite $\frac{a}{2}$.

7. Es gilt für die Wellenfunktion mit $X = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$,

$$\varphi_0(x) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar\pi}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \Rightarrow \varphi_0(X) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar\pi}} e^{-\frac{1}{2}X^2} ,$$

anwenden des Erzeugungsoperators ergibt

$$a^\dagger \varphi_0(X) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar\pi}} \left(X - \frac{\partial}{\partial X}\right) e^{-\frac{1}{2}X^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}\, 2X\, e^{-\frac{1}{2}X^2}$$

und somit

$$\boxed{\varphi_1(x) = \sqrt[4]{\frac{m^3\omega^3}{\hbar^3\pi}}\, \frac{2x}{\sqrt{2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}}.$$

8. Es gilt

$$\langle L_z \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \; Y_{l'}^{m'*}(\theta,\varphi)\; L_z \; Y_l^m(\theta,\varphi) \; .$$

Für $l = 1$ ist mit $\hat{L}_z = -i\hbar\partial_\varphi$

$$\begin{array}{llll} m = 0 : & \hat{L}_z Y_l^m = 0 & \Rightarrow & \langle L_z \rangle = 0 \, , \\ m = 1 : & \hat{L}_z Y_l^m(\theta,\varphi) = \hbar Y_l^m(\theta,\varphi) & \Rightarrow & \langle L_z \rangle = \hbar \\ m = -1 : & & & \langle L_z \rangle = -\hbar \; . \end{array}$$

9. (a) Für die Kugelflächenfunktionen gilt

$$\int d\Omega \; Y^*_{lm}(\theta,\varphi) Y_{lm}(\theta,\varphi) = 1 \; .$$

- $n = 1$

$$\begin{aligned}\langle r^2 \rangle &= \int_0^\infty dr \; r^2 R^*_{10}(r) \, r^2 \; R_{10}(r) \\ &= \int_0^\infty dr \; r^4 \, \frac{4}{a_0^3} \, e^{-2r/a_0} = \frac{a_0^2}{8} \int_0^\infty dx \; x^4 e^{-x} = 3a_0^2\end{aligned}$$

- $n = 2$

$$\begin{aligned}\langle r^2 \rangle &= \int_0^\infty dr \; r^2 R^*_{20}(r) \, r^2 \; R_{20}(r) \\ &= \frac{4}{(2a_0)^3} \int_0^\infty dr \; r^4 \left(1 - \frac{r}{a_0} + \frac{r^2}{4a_0^2}\right) e^{-r/a_0} \\ &= \frac{a_0^2}{2} \left(\int_0^\infty dx \; x^4 e^{-x} - \int_0^\infty dx \; x^5 e^{-x} + \frac{1}{4} \int_0^\infty dx \; x^6 e^{-x} \right) \\ &= 42a_0^2\end{aligned}$$

(b) Coulombkraft wirkt als Radialkraft und $L = mrv = n\hbar$ ergibt

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\mathrm{e}^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \qquad \Rightarrow r_n = \frac{n^2\hbar^2}{m} \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0}{\mathrm{e}^2} = n^2 a_0 \; .$$

somit für $n = 1$: $r^2 = a_0^2$ und für $n = 2$: $r^2 = 16a_0^2$.